

第2讲二次函数交点问题（练习）

一、直线与二次函数的交点问题

1. 已知二次函数图象的对称轴平行于 y 轴，顶点为 $(1, 2)$ ，且与直线 $y = 2x + k$ 相交于 $(2, -1)$ ，试求：

（1）二次函数的解析式．

（2） k 的值．

（3）该二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一交点的坐标．

2. 如图1，在平面直角坐标系中，抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx - a^2$ 关于 y 轴对称且有最小值 -1 ．

（1）求抛物线 C_1 的解析式．

（2）在图1中抛物线 C_1 顶点为 A ，将抛物线 C_1 绕点 B 旋转 180° 后得到抛物线 C_2 ，直线 $y = kx - 2k + 4$ 总经过一定点 M ，若过定点 M 的直线与抛物线 C_2 只有一个公共点，求直线 l 的解析式．

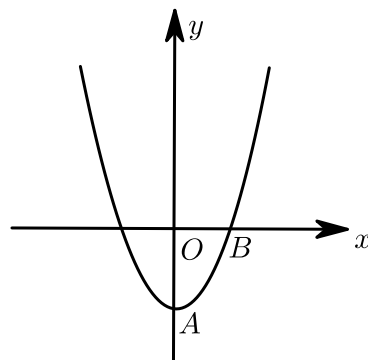
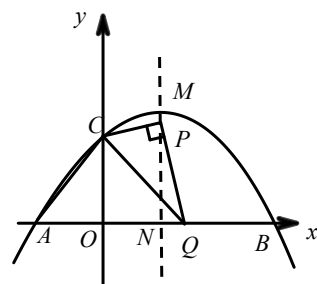
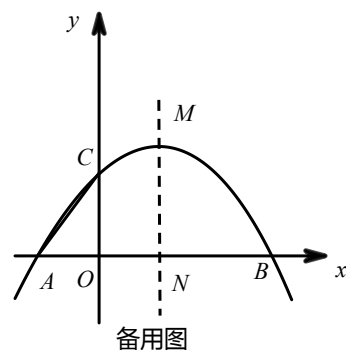


图 1

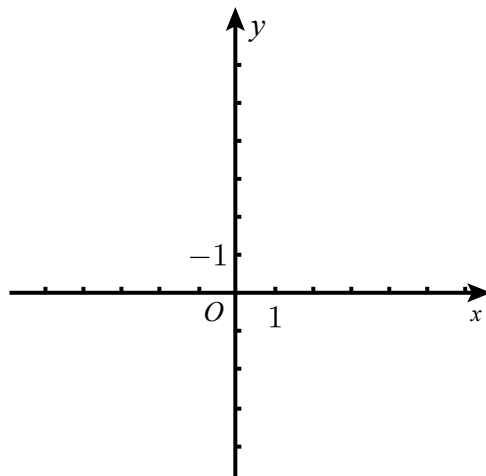
3. 如图，已知抛物线 $y = a(x+2)(x-6)$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于 C 点，且 $\tan \angle CAB = \frac{3}{2}$ ，设抛物线的顶点为 M ，对称轴交 x 轴于点 N 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) P 为抛物线的对称轴上一点， $Q(n, 0)$ 为 x 轴上一点，且 $PQ \perp PC$ 。
- ① 当点 P 在线段 MN (含端点) 上运动时，求 n 的变化范围。
 - ② 当 n 取最大值时，求点 P 到线段 CQ 的距离。
 - ③ 当 n 取最大值时，将线段 CQ 向上平移 t 个长度单位，使得线段 CQ 与抛物线有两个交点，求 t 的取值范围。

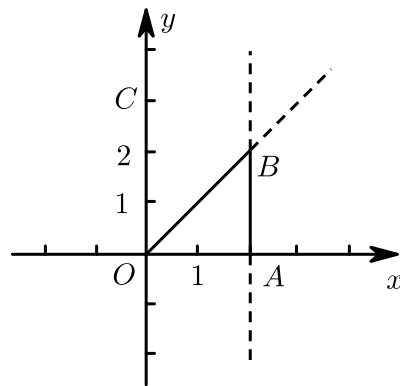


4. 已知二次函数 $y = (t+1)x^2 + 2(t+2)x + \frac{3}{2}$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值相等.



- (1) 求二次函数解析式 .
- (2) 若一次函数 $y = kx + 6$ 的图象与二次函数的图象都经过点 $A(-3, m)$, 求 m 和 k 的值 .
- (3) 把二次函数的图象与 x 轴两个交点之间的部分记为图象 G , 把图象 G 向左平移 $n(n > 0)$ 个单位后得到的图象记为 M , 请结合图象回答 : 当 (2) 中得到的直线与图象 M 有公共点时 , 求 n 的取值范围 .

5. 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 其对称轴与 x 轴交于点 $A(2, 0)$.



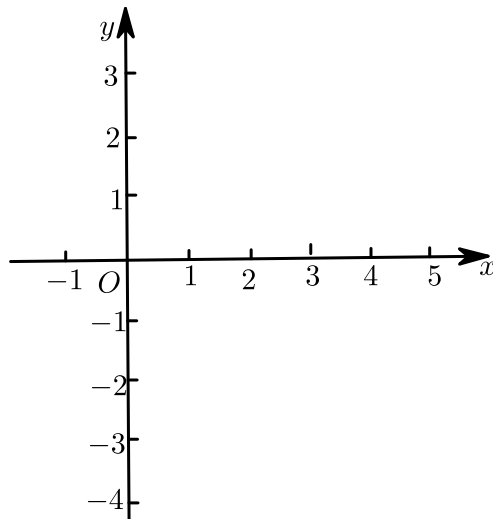
- (1) 求抛物线 C_1 的解析式.
- (2) 将抛物线 C_1 适当平移, 使平移后的抛物线 C_2 的顶点为 $D(0, k)$. 已知点 $B(2, 2)$, 若抛物线 C_2 与 $\triangle OAB$ 的边界总有两个公共点, 请结合函数图象, 求 k 的取值范围.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m + 3$ 的顶点为 A .

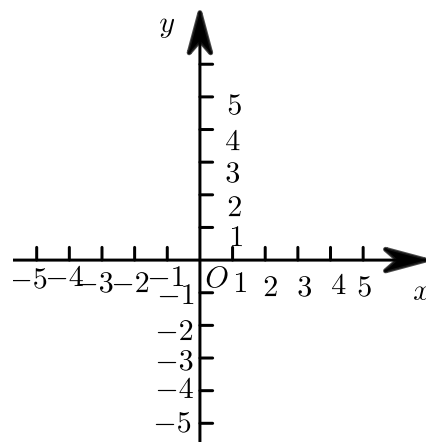
- (1) 求点 A 的坐标.
- (2) 将线段 OA 沿 x 轴向右平移 2 个单位得到线段 $O'A'$.

① 直接写出点 O' 和 A' 的坐标.

② 若抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m + 3$ 与四边形 $AOO'A'$ 有且只有两个公共点, 结合函数的图象, 求 m 的取值范围.



7. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + (1 - 2a)x - 2$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 C . 当 $a = 1$ 时，该抛物线与 x 轴的两个交点为 A, B (点 A 在点 B 左侧) .



- (1) 求点 A, B, C 的坐标 .
- (2) 若该抛物线与线段 AB 总有两个公共点，结合函数的图象，求 a 的取值范围 .
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - \frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A ，将点 A 向右平移2个单位长度，得到点 B ，点 B 在抛物线上 .
- (1) 求点 B 的坐标 (用含 a 的式子表示) .
- (2) 求抛物线的对称轴 .
- (3) 已知点 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a}\right)$ ， $Q(2, 2)$. 若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围 .

9. 已知抛物线： $y = mx^2 - 2mx + m + 1 (m \neq 0)$.

(1) 求抛物线的顶点坐标 .

(2) 若直线 l_1 经过 $(2, 0)$ 点且与 x 轴垂直，直线 l_2 经过抛物线的顶点与坐标原点，且 l_1 与 l_2 的交点 P 在抛物线上 . 求抛物线的表达式 .

(3) 已知点 $A(0, 2)$ ，点 A 关于 x 轴的对称点为点 B . 抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，结合函数图象写出 m 的取值范围 .

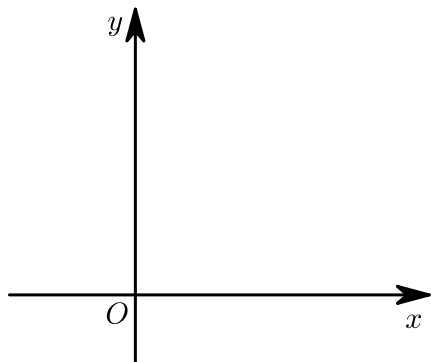
二、 直线与翻折后的抛物线的交点问题

10. 已知二次函数 $y = x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 2k - 3$ 与 x 轴有两个交点 .

(1) 求 k 的取值范围 .

(2) 求 k 取最小整数时，此二次函数的对称轴和顶点坐标 .

(3) 将(2)中求得的抛物线在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，图象的其余部分不变，得到一个
新图象，请你求出新图像与直线 $y = x + m$ 有三个不同公共点时 m 的值 .



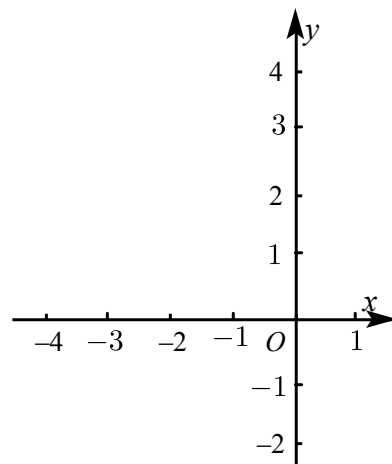
11. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + 4x + k - 1 = 0$ 有实数根， k 为正整数．

(1) 求 k 的值．

(2) 当此方程有两个非零的整数根时，将关于 x 的二次函数 $y = 2x^2 + 4x + k - 1$ 的图象向下平移8个单位，求平移后的图象的解析式．

(3) 在(2)的条件下，将平移后的二次函数的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新的图象．请你结合这个新的图象回答：当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b < 3$) 与此图象有两个公共点时， b 的取值范围．

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + \frac{k-1}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根， k 为正整数．



- (1) 求 k 的值．
- (2) 当此方程有一根为零时，直线 $y = x + 2$ 与关于 x 的二次函数 $y = x^2 + 2x + \frac{k-1}{2}$ 的图象交于 A 、 B 两点，若 M 是线段 AB 上的一个动点，过点 M 作 $MN \perp x$ 轴，交二次函数的图象于点 N ，求线段 MN 的最大值及此时点 M 的坐标．
- (3) 将(2)中的二次函数图象 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方，图象的其余部分保持不变，翻折后的图象与原图象 x 轴上方的部分组成一个“W”形状的新图象，若直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与该新图象恰好有三个公共点，求 b 的值．

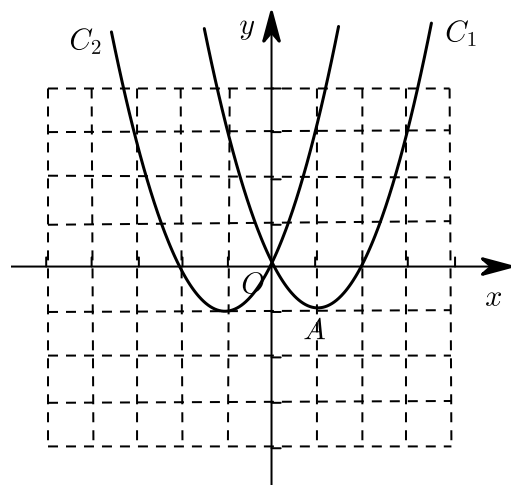
13. 已知二次函数 $y = (t - 4)x^2 - (2t - 5)x + 4$ 在 $x = 0$ 与 $x = 5$ 的函数值相等 .

(1) 求二次函数的解析式 .

(2) 若二次函数的图象与 x 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 左侧) , 与 y 轴交于点 C , 一次函数 $y = kx + b$ 经过 B, C 两点 , 求一次函数的表达式 .

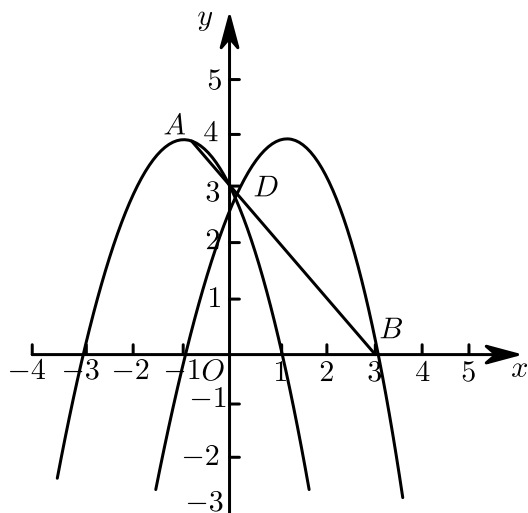
(3) 在 (2) 的条件下 , 过动点 $D(0, m)$ 作直线 $l \parallel x$ 轴 , 其中 $m > -2$. 将二次函数图象在直线 l 下方的部分沿直线 l 向上翻折 , 其余部分保持不变 , 得到一个新图象 M . 若直线 $y = kx + b$ 与新图象 M 恰有两个公共点 , 请直接写出 m 的取值范围 .

14. 已知抛物线 $C_1: y = x^2 - 2x$ 图象如图所示，把 C_1 的图象沿 y 轴翻折，得到抛物线 C_2 的图象，抛物线 C_1 与抛物线 C_2 的图象合称图象 C_3 .



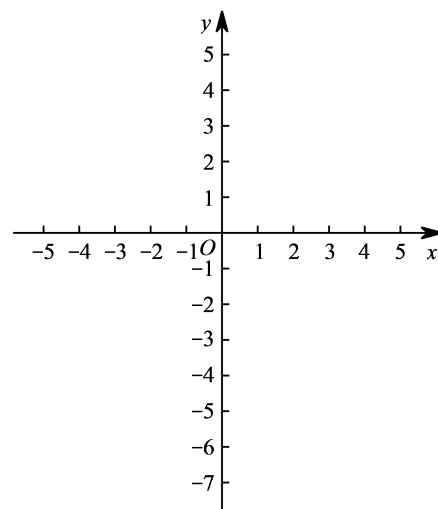
- (1) 求抛物线 C_1 的顶点 A 坐标 .
- (2) 若直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 有且只有一个交点时，称直线与抛物线相切 .
若直线 $y = x + b$ 与抛物线 C_1 相切，求 b 的值 .
- (3) 结合图象回答，当直线 $y = x + b$ 与图象 C_3 有两个交点时， b 的取值范围 .

15. 已知抛物线 C_1 的顶点为 $A(-1, 4)$ ，与 y 轴的交点为 $D(0, 3)$ 。

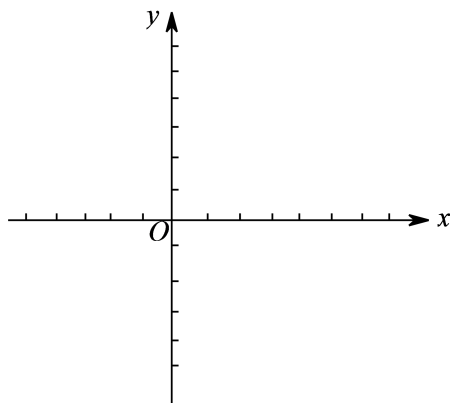


- (1) 求 C_1 的解析式。
- (2) 若直线 $l_1: y = x + m$ 与 C_1 仅有唯一的交点，求 m 的值。
- (3) 若抛物线 C_1 关于 y 轴对称的抛物线记作 C_2 ，平行于 x 轴的直线记作 $l_2: y = n$ 。试结合图形回答：
当 n 为何值时， l_2 与 C_1 和 C_2 共有：①两个交点。②三个交点。③四个交点。

16. 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + (m-2)x + 2m-6$ 的对称轴为直线 $x = 1$ ，与 x 轴交于 A, B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C 。
- (1) 求 m 的值。
- (2) 求 A, B, C 三点的坐标。
- (3) 过点 C 作直线 $l \parallel x$ 轴，将该抛物线在 y 轴左侧的部分沿直线 l 翻折，抛物线的其余部分保持不变，得到一个新的图象，记为 G 。请你结合图象回答：当直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与图象 G 只有一个公共点时，求 b 的取值范围。



17. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - (a+1)x - 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ 。

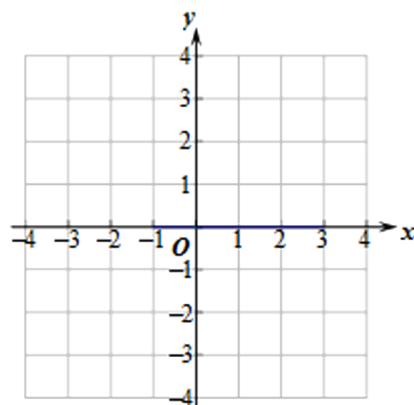


- (1) 求 B 点与顶点 D 的坐标。
- (2) 经过点 B 的直线 l 与 y 轴正半轴交于点 M ， $S_{\triangle ADM} = 5$ ，求直线 l 的解析式。
- (3) 点 $P(t, 0)$ 为 x 轴上一动点，过点 P 作 x 轴的垂线 m ，将抛物线在直线 m 左侧的部分沿直线 m 对称，图象的其余部分保持不变，得到一个新图象 G 。请结合图象回答当图象 G 与直线 l 没有公共点时， t 的取值范围是 _____。

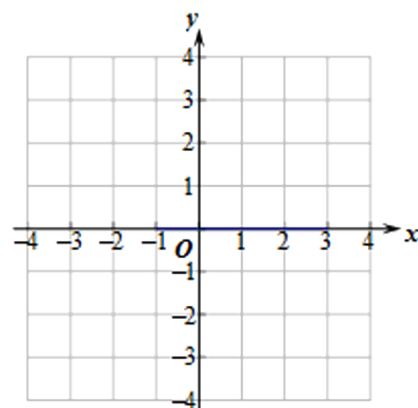
三、 抛物线开口大小与整点问题

18. 定义：在平面直角坐标系中，若点 A 满足横、纵坐标都为整数，则把点 A 叫做“整点”。如： $B(3, 0)$ 、 $C(-1, 3)$ 都是“整点”。抛物线 $y = ax^2 - 2ax + a + 2$ ($a < 0$)与 x 轴交于点 M 、 N 两点，若该抛物线在 M 、 N 之间的部分与线段 MN 所围的区域（包括边界）恰有5个整点，则 a 的取值范围是（ ）。
- A. $-1 \leq a < 0$ B. $-2 \leq a < -1$ C. $-1 \leq a$ D. $-1 \leq a < 0$

19. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = a(x+1)(x-3)$ 与 x 轴交于 A, B 两点，点 A 在点 B 的左侧，抛物线的顶点为 P ，规定：抛物线与 x 轴围成的封闭区域称为“ G 区域”（不包含边界）。

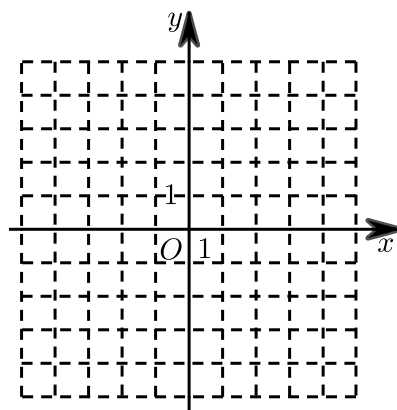


- (1) 如果该抛物线经过 $(1, 3)$ ，求 a 的值 _____，并指出此时“ G 区域”有 _____ 个整数点。（整数点就是横纵坐标均为整数的点）
- (2) 求抛物线 $y = a(x+1)(x-3)$ 的顶点 P 的坐标（用含 a 的代数式表示）。
- (3) 在(2)的条件下，如果 G 区域中仅有4个整数点时，直接写出 a 的取值范围。



备用图

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3a$ 的对称轴交于点 $A(m, -1)$ ，点 A 关于 x 轴的对称点恰为抛物线的顶点．



- (1) 求抛物线的对称轴及 a 的值．
- (2) 横，纵坐标都是整数的点叫做整点，记直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与抛物线围成的封闭区域 (不含边界) 为 W ．
- ① 当 $k = 1$ 时，直接写出区域 W 内的整点个数．
 - ② 若区域 W 内恰有3个整点，结合函数图象，求 b 的取值范围．